Составил: доц. Коротков Н.А., компьютерная вёрстка: доц. Коротков Н.А.

ПОНЯТИЙНЫЙ АППАРАТ МАТЕМАТИКИ

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

1. Определение предела функции на "языке $\varepsilon-\delta$ (эпсилон-дельта)":

Число A называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Тогда пишут $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

2. Определение производной.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется ***производной функции*** $y=f(x)$ в точке x:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x, при этом она обязательно непрерывна в этой точке.

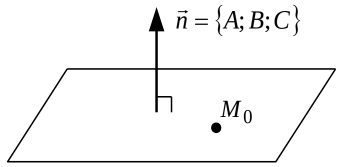
Геометрически величина производной $f'(x)$ представляет собой *угловой коэффициент касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке x.

3. Правила дифференцирования

1) $C'=0$;
2) $x'=1$;
3) $(U\pm V)'=U'\pm V'$;
4) $(CU)'=C\cdot U'$;
5) $(U\cdot V)'=U'\cdot V+U\cdot V'$;
6) $\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'\cdot V-U\cdot V'}{V^2}$, $V\neq 0$.

Здесь C − константа, U и V − дифференцируемые функции переменной x.

4. Общее уравнение плоскости в пространстве.



$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$, где $\vec{n}=\{A;B;C\}$ − *вектор нормали* к плоскости, т.е. любой вектор, перпендикулярный плоскости;

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, имеет вид

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}.$$

5. Канонические уравнения прямой в пространстве.

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}},$$

где $\vec{s}\{m;n;p\}$ – *направляющий вектор* прямой, т.е. любой вектор параллельный прямой;

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, через которую проходит прямая.

5. Первообразная

Определение. Функция $F(x)$, дифференцируемая на некотором промежутке X числовой оси, называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на этом промежутке, если $\forall\ x\in X{:}\ F'(x)=f(x)$.

6. Неопределенный интеграл

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке X называется ***неопределённым интегралом*** от этой функции на этом промежутке и обозначается:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где $\int$ - знак интеграла;

x – переменная интегрирования;
$f(x)$ – подынтегральная функция;
dx – дифференциал переменной интегрирования;
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;
$F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$;
C – произвольная постоянная.

7. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Для любого ненулевого числа c справедливо равенство

$$\int cf(x)dx=c\int f(x)dx.$$

Свойство 2. Для любых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ справедливо равенство

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))\,dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$$

8. Формула интегрирования по частям

Пусть даны две функции $u = u(x), v = v(x)$, имеющие непрерывные производные. Тогда справедлива формула ***интегрирования по частям***:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Если рассматривается определённый интеграл по промежутку $[a;b]$, то формула интегрирования по частям принимает вид:

$$\int_a^b u\,dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

при условии, что определённые интегралы справа и слева существуют.

9. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$.

10. Определение частных производных функции двух переменных.

Частной производной функции $z = f(x,y)$ **по** x называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции по x к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Частной производной функции $z = f(x,y)$ по y называется предел отношения частного приращения $\Delta_y z$ функции по y к приращению аргумента Δy, когда Δy стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

11. Необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Необх. усл. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$ и имеет в этой точке экстремум (максимум или минимум), то $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0\end{cases}$.

Дост. усл. Если $M_0(x_0,y_0)$ - *стационарная точка* дважды дифференцируемой функции $f(x,y)$ и если $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$, то функция имеет экстремум, если $AC - B^2 > 0$ и не имеет экстремума, если $AC - B^2 < 0$. При этом экстремум - максимум, если $A < 0$ и минимум, если $A > 0$.

12. Задача Коши для дифференциального уравнения.

Задача Коши с начальными данными $x_0, y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ для дифференциального уравнения $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$ состоит в нахождении такого решения $\varphi(x)$ дифференциального уравнения, которое удовлетворяет равенствам:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

13. Определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальным уравнением с ***разделяющимися переменными*** называется уравнение, которое можно преобразовать к виду

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

14. Определение линейного дифференциаль-ного уравнения 1-го порядка.

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x).$$

15. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 1-го порядка.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 1-го порядка является суммой общего решения $y_{общодн}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y_* данного уравнения:

$$y_{общнеодн} = y_{общодн} + y_*.$$

16. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Пусть $y_1, \ldots y_n$ фундаментальная система решений ЛОДУ(n). Тогда общее решение ЛОДУ(n) имеет вид:

$$y_{общодн} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

17. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Общее решение ЛНДУ(n) является суммой общего решения $y_{общодн}$ ЛОДУ(n) и частного решения y_* ЛНДУ(n):

$$y_{общнеодн} = y_{общодн} + y_*.$$